Eesti koolinoorte LVIII täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 24. novembril 2010.a.
XII klass

LAHENDUSED JA HINDAMINE

1. *Vastus:* a) **6**; b) **ei**.

Lahendus.

a) Ühe minutiga täidab esimene pump $\frac{1}{2\cdot 60}$ osa basseinist, teine pump $\frac{1}{4\cdot 60}$ osa basseinist, kolmas pump $\frac{1}{8\cdot 60}$ osa basseinist jne.

Koos töötades täidavad m pumpa ühe minutiga $\frac{1}{60}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$ osa basseinist ning 61 minutiga $\frac{61}{60}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$ osa basseinist.

Et 61 minutiga on vaja täita terve bassein, siis saame võrratuse

$$\frac{61}{60}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)>1$$

Sulgudes kasutame geomeetrilise jada summa valemit $S_m=\frac{a_1\cdot\left(1-q^m\right)}{1-q}$.

$$\frac{61}{60}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right]}{1-\frac{1}{2}}\geq 1$$

Antud juhul $a_1=\frac{1}{2}$ ja $q=\frac{1}{2}$

$$\frac{61}{60}\cdot\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\geq 1,$$

millest pärast lihtsustusi

$$2^m\geq 61\Rightarrow m\geq 6$$

Niisiis on minimaalne vajaminev pumpade arv 6.

b) Ei.

Tõepoolest, vastavalt hääbuva geomeetrilise jada summa valemile $s=\frac{a_1}{1-q}$ saame

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^m}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

mis tähendab, et mistahes m korral täidavad m pumpa koos töötades ühe tunniga vähem kui terve basseini.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

2. *Vastus:* **Osakondi on 3; 5; 15 või 67.**

Lahendus. Et töötajate arv jagub osakondade arvuga, siis peab

$$\frac{2007-6n}{2n+1} \in N .$$

Teisendame eelneva murru uurimiseks sobivale kujule

$$\frac{2007-6n}{2n+1} = \frac{2010-6n-3}{2n+1} = \frac{2010-3(2n+1)}{2n+1} = \frac{2010}{2n+1} - 3 .$$

Viimasest on selge, et algse murru väärtus on positiivne täisarv ainult siis, kui $2010 \vdots (2n+1)$.

$2n+1$	1	2	3	5	6	10	15	30	67
n	0	0,5	1	2	2,5	4,5	7	14,5	33

Et $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$, siis on $2n+1$ võimalikud väärtused: ± 1 ± 2; ± 3; ± 5; $\pm 6\,(2\cdot 3)$; ± 10; ± 15; … ; ± 2010.
Vastavalt ülesande tingimustele on $2n+1$ arvust 70 väiksem positiivne täisarv, seega jäävad võimalused
Arvu n võimalikud väärtused on 1; 2; 7 ja 33. Seega on osakondasid kas 3, 5, 15 või 67.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

3. *Vastus:* $\mathbf{x=3}$

Lahendus. Logaritmide omadusi kasutades teisendame võrrandi mõlemad pooled alusele *x*.
Vasak pool

$$\log_{\sqrt{x}}(x+6)=\frac{\log_x(x+6)}{\log_x\sqrt{x}}=\frac{\log_x(x+6)}{\log_x x^{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_x(x+6)}{\frac{1}{2}\log_x x}=2\log_x(x+6)$$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a b^n = n\log_a b$

Parem pool $8\log_{x+6} x=\frac{8}{\log_x(x+6)}$.

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

Niisiis saame võrrandi

$$2\log_x(x+6)=\frac{8}{\log_x(x+6)},$$

Mõlemal juhul kasutame logaritmi definitsiooni
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x=b$,
kus a > 0, a ≠ 1 ning b > 0.

millest omakorda

$$[\log_x(x+6)]^2=4$$
$$\log_x(x+6)=\pm 2$$

a) Kui $\log_x(x+6)=2$, siis saame ruutvõrrandi $x^2-x-6=0$, mille lahendid on $x_1=3$ ja $x_2=-2$. Paraku on -2 võõrlahend, sest ei sobi lähtevõrrandis juure aluseks ega ka logaritmitavaks.

b) Kui $\log_x(x+6)=-2$, siis saame võrrandi $\frac{1}{x^2}=x+6$. Et x peab olema täisarv, siis on ka x + 6 ja $\frac{1}{x^2}$ täisarvud. Viimane on võimalik vaid siis, kui $x_{3;4}=\pm 1$. Paraku ka need kaks lahendit ei sobi lähtevõrrandisse: -1 tekitab negatiivse logaritmitava, 1 ei sobi aga logaritmi aluseks.
Niisiis on ainsaks täisarvuliseks lahendiks $x=3$.

<u>Kontroll</u>, kui $x=3$.

$$vp=\log_{\sqrt{x}}(x+6)=\log_{\sqrt{3}}(3+6)=\log_{\sqrt{3}}9=4$$

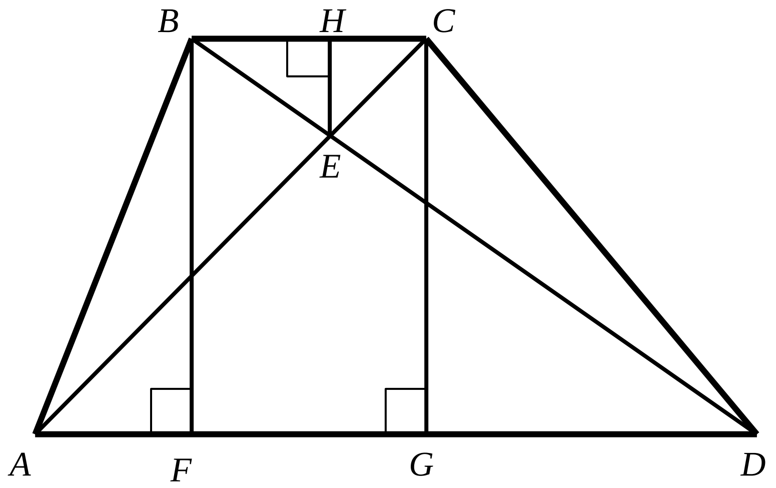
$$pp=8\cdot\log_{x+6}x=8\cdot\log_{3+6}3=8\cdot\log_9 3=8\cdot\frac{1}{2}=4$$

$$vp=pp$$

LAHENDUSED JA HINDAMINE

4. *Vastus:* $\boldsymbol{S_{BEC} = \frac{9}{25}}$.

Lahendus. Teeme abistava joonise.



Täiendame joonist kõrgustega *BF*, *CG* ja *EH*. Olgu trapetsi kõrgus *h*.

1) Avaldame lõikude *AF* ja *DG* pikkused trapetsi kõrguse *h* kaudu.

Täisnurksest kolmnurgast *AFB*:

$$\tan\angle A = \frac{|BF|}{|AF|} \Rightarrow |AF| = \frac{|BF|}{\tan\angle A} = \frac{h}{3}.$$

Täisnurksest kolmnurgast *CGD*:

$$\tan\angle D = \frac{|CG|}{|GD|} \Rightarrow |GD| = \frac{|CG|}{\tan\angle D} = \frac{h}{2}.$$

2) Aluse *AD* pikkuse abil leiame trapetsi kõrguse.

Et

$$|AF| + |FG| + |GD| = |AD|,$$

siis

$$\frac{h}{3} + 1 + \frac{h}{2} = 4 \Rightarrow \frac{5}{6}h = 3 \Rightarrow h = \frac{18}{5}$$

3) Leiame kolmnurga *BEC* kõrguse *EH* pikkuse.

Vastavalt tunnusele NN on kolmnurgad *ADE* ja *BEC* sarnased. Et $\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{1}{4}$, siis suhtuvad samal moel ka vastavate kolmnurkade kõrgused. Trapetsi kõrgusesse suhtub kolmnurga *BEC* kõrgus nagu 1 : 5, $|EH| = \frac{1}{5}h = \frac{18}{25}$.

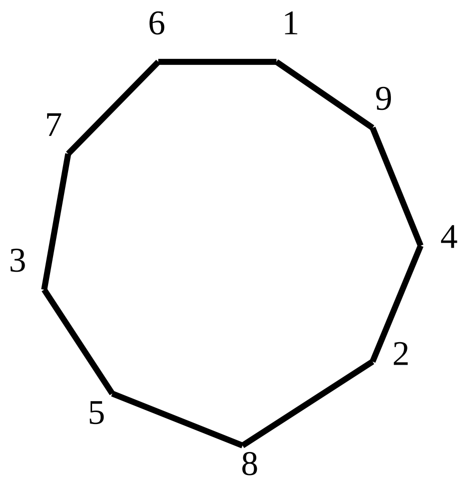
4) Leiame kolmnurga *BEC* pindala.

$$S_{BEC} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|EH| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{18}{25} = \frac{9}{25}$$

LAHENDUSED JA HINDAMINE

5. *Vastus:* **16**.

Lahendus. Iga number esineb täpselt kolmes summas, seega kõigi kolmikute summa on $3 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 135$.
Kuna kokku on 9 kolmikut, siis $N \geq 15$.
Kui $N = 15$, siis peaks igas kolmikus numbrite summa olema 15. Vaadates kahte järjestikust kolmikut *A*, *B*, *C* ja *B*, *C*, *D* aga näeme, et sel juhul peaks olema $C = D$, mis on vastuolus ülesande tingimustega.
Juhul kui $N = 16$ on aga sobilik paigutus olemas, näiteks



LAHENDUSED JA HINDAMINE

1.	a) Ühes minutis tehtavate tööosade väljakirjutamise (või mõistmise) eest	1p
	Ühes minutis *m* pumba poolt tehtava kogutöö avaldise eest	1p
	Võrratuse väljakirjutamise eest	1p
	Geomeetrilise jada summa valemi rakendamise eest	1p
	Võrratuse lahendamise ja vastuse eest	1p
	b) Vastuse eest	1p
	Põhjenduse eest	1p
		7p
2.	Murru teisendamise eest mugavale kujule	1p
	Tähelepanekul, et 2010 jagub teguriga $2n + 1$, eest	2p
	Ülesande tehnilise lõpuleviimise eest kokku (iga lahendi eest 1p)	4p
	Märkus. Kui õpilane proovib läbi kõik väärtused $n = 1; 2; \ldots; 34$ ning leiab nii sobivad osakondade arvud, siis tuleb ka selline lahendus lugeda 7 punkti vääriliseks.	**7p**
3.	Võrrandi teisendamise eest kujuni $\log_x(x+6) = \pm 2$	3p
	Lahendite 3 ja -2 kindlakstegemise eest	1p
	Lahendi -2 väljapraakimise eest	1p
	Lahendite 1 ja -1 kindlakstegemise eest	1p
	Lahendite 1 ja -1 väljapraakimise eest	1p
	Märkus. Lahendit 3 tuleks küll kontrollida, aga antud juhul selle kontrolli puudumist mitte karistada. Küll aga peaks ainsat kõlblikku lahendit rõhutama.	**7p**
4.	Korrektse abijoonise eest	1p
	Lõigu *AF* pikkuse ja trapetsi kõrguse vahelise seose eest	1p
	Lõigu *GD* pikkuse ja trapetsi kõrguse vahelise seose eest	1p
	Trapetsi kõrguse leidmise eest	1p
	Sarnaste kolmnurkade märkamise eest	1p
	Kolmnurga *BEC* kõrguse leidmise eest	1p
	Kolmnurga *BEC* pindala leidmise eest	1p
	Märkus. Pärast trapetsi kõrguse kindlakstegemist saab kolmnurga *BEC* pindala leidmisel vältida eelnevalt antud lahendust. Ükskõik kui keerulise, kuid õige lahenduse korral anda 7p.	**7p**
5.	Kõikide kolmikute summa (135) leidmise eest	1p
	Kolmikute arvu (9) eest	1p
	Mõistmise, et $N \geq 15$, eest	1p
	Juhu $N = 15$ väljapraakimise eest	2p
	Juhu $N = 16$ korral sobiliku paigutuse näitamise eest	2p
		7p